UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL
“LISANDRO ALVARADO”
DECANATO DE INGª CIVIL
DEPARTAMENTO DE INGª VIAL
BARQUISIMETO-VENEZUELA

Ingeniería Vial I (21055)
Ingº José Raúl de la Cruz F.
Sección 2017-1/51
Ingº Raúl E. de la Cruz V.
Sección 2017-1/52

No es el ángulo recto lo que me atrae.
Ni la línea recta dura, inflexible,
creada por el hombre.
Lo que me atrae es la curva libre y sensual.
La curva que encuentro en las montañas de mi país.
En el curso sinuoso de sus ríos... en las ondas
del mar... en el cuerpo de la mujer amada.
De curvas está hecho todo el Universo.

Oscar Niemeyer (1907-2012)

CURVAS DE TRANSICIÓN

Para lograr que un vehículo que describe una trayectoria rectilínea pase a una circular, el conductor actúa sobre los componentes direccionales produciendo la acción deseada. Ese cambio de dirección tiene lugar en el área "barrida" por el móvil en su desplazamiento de manera que podemos inferir, analizando empíricamente la trayectoria descrita, su eventual asimilación a una curva plana matemáticamente definida o su probable naturaleza aleatoria.

En 1941 el trazadista vial Olaf Gläser analizó, en la helada población alemana de Dresden, la huella dejada por miles de automóviles sobre la nieve y el limo en zonas sin señalización vertical ni demarcación de canales. El resultado fue concluyente, la trayectoria descrita desde el alineamiento recto hasta alcanzar la curvatura constante deseada, responde al grupo de las radiodes, curvas planas cuya característica principal es la variación del radio de curvatura en función de alguno de sus elementos geométricos. Tenemos así, la radiode de abscisa (Parábola cúbica), la de cuerda (Lemniscata u óvalo de Cassini), y la de arco (Clotoide, o "Espiral" de Cornu) definida por Jacobo Bernoulli en 1680.

Las curvas de transición o simplemente transiciones, tienen su origen práctico en la dinámica de los ferrocarriles. A medida que la potencia de las locomotoras aumentó y con ella la velocidad de desplazamiento, se produjeron graves descarrilamientos que obligaron a la investigación aplicada a dar con soluciones técnicas satisfactorias: a) la sobreelevación del riel exterior y b) la inserción de una radiode entre el alineamiento recto y el de curvatura constante. En realidad la inserción de la radiode no perseguía en un principio regular los incrementos de aceleración radial en la curvatura horizontal sino la obtención de una línea recta en el perfil longitudinal del riel exterior para la Longitud de Transición de peralte. Esta necesidad solo se cumple rigurosamente en una curva cuyo radio de curvatura decrezca en proporción inversa al arco recorrido razón por la que se adoptó para las carreteras, luego de largas polémicas entre los promotores de las otras radiodes, a la Clotoide como la transición por antonomasia.

Esta radiode, incorrecta pero usualmente denominada "espiral", posee características comunes a las demás radiodes pero además otras ventajas como: a) el isodinamismo que permite deflexiones constantes de las ruedas direccionales, b) la variación constante del radio de curvatura desde infinito en su punto de tangencia hasta cero en cualquiera de sus polos y c) el replanteo, análogo al de los arcos circulares. Por otra parte, y esta es una de sus aplicaciones más importantes, en su longitud es posible desarrollar racionalmente el peralte.

Huge Kasper, W. Schurba y H. Lorenz, en su texto, hoy clásico, "La clotoide como elemento del trazado", de principio de la década de los '50 del siglo pasado, sentaron las bases para que la "curva misteriosa" dejara de ser tal. La expresión del parámetro de la Clotoide como una variable cuadrática es un artificio matemático introducido por Kasper en el diseño geométrico de carreteras:

$$\boldsymbol{R \cdot L = R_c \cdot L_e = A^2}$$

donde:

$\boldsymbol{R}$: Radio en el punto genérico PSC

$\boldsymbol{L}$: Arco clotoidal hasta el PSC de radio R

$\boldsymbol{R_c}$: Radio del arco circular

$\boldsymbol{L_e}$: Arco clotoidal hasta el punto $\boldsymbol{EC}$ o $\boldsymbol{CE}$

$\boldsymbol{A}$: Parámetro de la Clotoide

El valor del parámetro se obtiene haciendo $\boldsymbol{R = L}$, de donde:

$$\boldsymbol{A^2 = L \cdot L = L^2 \quad \therefore \quad A = L = R}$$

Esto equivale a decir que el parámetro de la Clotoide es el valor del radio de curvatura en el extremo de un arco de longitud $\boldsymbol{R}$. Al punto de la curva donde se cumple ta igualdad se le denomina ***paramétrico***. El valor del ángulo tangencial en dicho punto es un valor constante: 0,5 radianes. De aquí se concluye que las infinitas clotoides son iguales en su forma y es el Parámetro su relación de homotecia.

El parámetro de la clotoide también puede calcularse a partir del conocimiento de la longitud de arco y del ángulo ($\boldsymbol{\theta}$) obtenido por la diferencia de ángulos tangenciales en los extremos de dicho arco. Sea $\boldsymbol{dL}$, en la figura siguiente, un elemento diferencial de arco de clotoide:

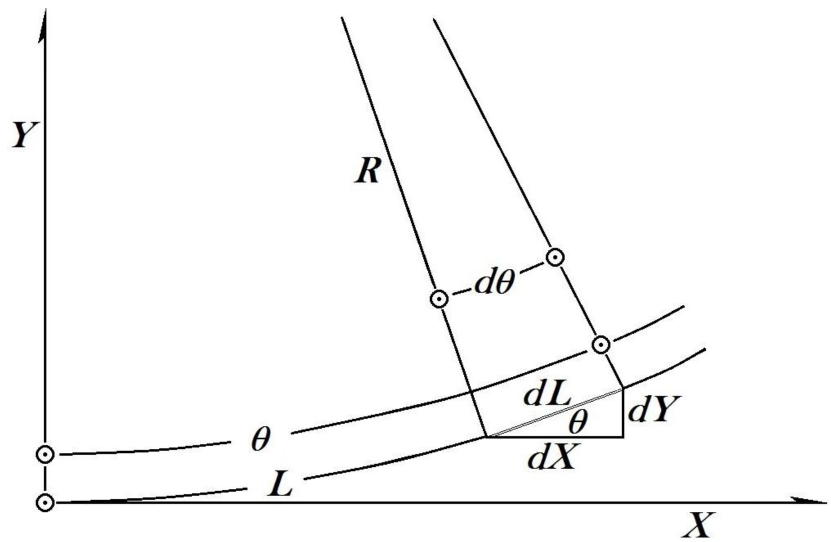

Figura 48 Análisis geométrico para un elemento diferencial de un arco clotoidal.

$$\boldsymbol{dL = R \cdot d\theta}$$

$$\boldsymbol{d\theta = \frac{dL}{R}}$$

pero,

$$\boldsymbol{R = \frac{A^2}{L}}$$

sustituyendo:

$$\boldsymbol{d\theta = \frac{1}{A^2}\, L\, dL}$$

integrando:

$$\boldsymbol{\int d\theta = \int \frac{1}{A^2}\, L\, dL}$$

$$\boldsymbol{\theta = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{L^2}{2} \quad \therefore \quad \theta = \frac{L^2}{2 \cdot A^2}}$$

y finalmente:

$$\boldsymbol{A = \frac{L}{\sqrt{2\theta}}}$$

Aunque el ángulo tangencial $\boldsymbol{\theta}$ varía entre cero y $\boldsymbol{3\pi/4}$ radianes, en la práctica valores altos[12] son puntualmente empleados:

[12] *En Venezuela se utilizaron en 1956, para los enlaces del Autopista del Este, en Caracas, clotoides de transición total con ángulos tangenciales de 135º. Hoy día se prefieren transiciones precediendo y siguiendo a un arco circular que evita el cambio instantáneo de dirección en el punto ECE.*

Si bien es cierto que la expresión paramétrica de la clotoide se determina sin mayor complicación, sus otros elementos no son sencillos de determinar y a ello se debió el que por muchos años se utilizaron para su cálculo, aprovechando la homotecia de la curva, tablas contentivas de valores tabulados de sus elementos geométricos para una longitud de parámetro unitario. Multiplicando el valor del elemento geométrico en el punto de semejanza de la clotoide de parámetro unitario, por el parámetro de la otra clotoide, se obtiene el valor del elemento deseado. Hoy día la versatilidad de las computadoras personales y sus integradas versiones de bolsillo, muchas de ellas programables, han permitido reducir a niveles insospechados los lentos y tediosos procedimientos de cálculo. Sin embargo, las tablas son de gran utilidad cuando, por ejemplo, se requiere un valor aproximado inicial para un proceso de iteración.

Como ya se expresó las coordenadas rectangulares son más laboriosas de obtener; para deducirlas analicemos la figura siguiente:

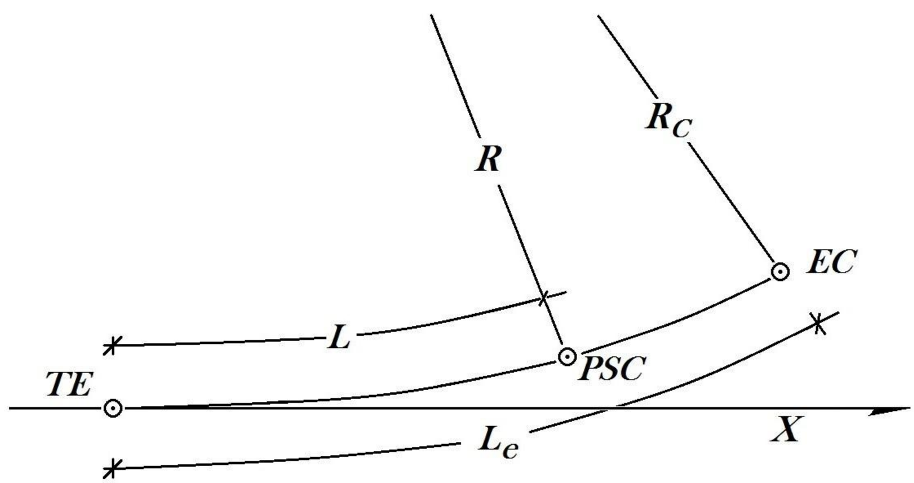

Figura 49 Esquema ilustrativo de las relaciones geométricas entre arcos y radios de un punto genérico PSC y del EC en un arco de clotoide.

Por definición la clotoide es una radiode cuya curvatura varía inversamente proporcional con respecto al desarrollo del arco $\boldsymbol{L}$, por ello, en un punto genérico $\boldsymbol{PSC}$ de una transición, se tiene que:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{L}$$

Si un arco de la misma clotoide es empleado como acuerdo horizontal entre una recta y un arco de círculo, tendremos que en el punto $\boldsymbol{EC}$, el arco y el radio tendrán por valor $\boldsymbol{L_e}$ y $\boldsymbol{R_C}$, respectivamente, por tanto:

$$\frac{1}{R_C} = C \cdot L_e$$

Eliminando la constante de proporcionalidad $\boldsymbol{C}$ resulta:

$$\frac{1}{R \cdot L} = \frac{1}{R_C \cdot L_e}$$

de donde:

$$R = \frac{R_C \cdot L_e}{L}$$

también,

$$d\theta = \frac{dL}{R}$$

Sustituyendo en la última ecuación a $\boldsymbol{R}$ por su equivalente:

$$d\theta = \frac{L}{R_C \cdot L_e}\, dL$$

Integrando:

$$\int d\theta = \int_0^L \frac{L}{R_C \cdot L_e}\, dL$$

finalmente,

$$\theta = \frac{L^2}{2 \cdot R_C \cdot L_e}$$

Cuando $\boldsymbol{\theta}$ tiende a $\boldsymbol{\theta_e}$, $\boldsymbol{L}$ tiende a $\boldsymbol{L_e}$ por lo que podemos escribir para el punto $\boldsymbol{EC}$:

$$\theta_e = \frac{(L_e)^2}{2 \cdot R_C \cdot L_e} = \frac{L_e}{2 \cdot R_C}$$

La relación por cociente entre θ y θ_e será:

$$\frac{\theta}{\theta_e} = \frac{\frac{L^2}{2 \cdot R_C \cdot L_e}}{\frac{L_e}{2 \cdot R_C}} = \frac{2 \cdot R_C \cdot L^2}{2 \cdot R_C \cdot (L_e)^2} = \frac{L^2}{(L_e)^2}$$

simplificando términos y despejando $\boldsymbol{\theta}$ se tiene:

$$\theta = \theta_e \frac{L^2}{(L_e)^2} = \theta_e \left(\frac{L}{L_e}\right)^2$$

Esta fórmula es la más directa para la determinación de $\boldsymbol{\theta}$ en un punto cualquiera de la transición ya que se puede expresar el ángulo tangencial tanto en radianes como en grados sexagesimales o centesimales.

De la Figura 48 de la página 126 se tiene que:

$$dX = dL \cdot \cos\theta$$

$$dY = dL \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Estableciendo como origen relativo de la clotoide su punto de tangencia con el eje de las abscisas (radio ∞) y la perpendicular en dicho punto y desarrollando el coseno y seno por su expresión seriada tenemos:

$$dX = dL\left\{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} \cdots\right\}$$

$$dY = dL\left\{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} \cdots\right\}$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores a $\boldsymbol{\theta}$ por su equivalente $\boldsymbol{\theta_e\,(L/L_e)^2}$ y luego integrando la serie de términos resulta:

$$X = L\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(4n+1)\,(2n)\,!}$$

Análogamente

$$Y = L\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(4n+3)\,(2n)\,!}$$

En la práctica se desprecian los términos de la serie a parir del cuarto por ser infinitésimos de orden superior resultando ecuaciones manejables:

$$X = L\left(1 - \frac{\theta^2}{5\cdot 2!} + \frac{\theta^4}{9\cdot 4!} - \frac{\theta^6}{13\cdot 6!}\right)$$

$$Y = L\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{7\cdot 3!} + \frac{\theta^5}{11\cdot 5!} - \frac{\theta^7}{15\cdot 7!}\right)$$

Las ecuaciones anteriores proveen las coordenadas rectangulares relativas de un punto genérico de la clotoide definida por su longitud. Para obtener las cartesianas de una clotoide definida por su parámetro las ecuaciones son:

$$X = L\left(1 - \frac{(L/A)^4}{4 \cdot 5 \cdot 2!} + \frac{(L/A)^8}{16 \cdot 9 \cdot 4!} - \frac{(L/A)^{12}}{64 \cdot 13 \cdot 6!}\right)$$

$$Y = L\left(\frac{(L/A)^2}{2 \cdot 3!} - \frac{(L/A)^6}{8 \cdot 7 \cdot 3!} + \frac{(L/A)^{10}}{32 \cdot 11 \cdot 5!} - \frac{(L/A)^{14}}{128 \cdot 15 \cdot 7!}\right)$$

$$X = L\left(1 - \frac{(L/A)^4}{40} + \frac{(L/A)^8}{3456} - \frac{(L/A)^{12}}{599040}\right)$$

$$Y = L\left(\frac{(L/A)^2}{12} - \frac{(L/A)^6}{336} + \frac{(L/A)^{10}}{42240} - \frac{(L/A)^{14}}{9676800}\right)$$

A las coordenadas cartesianas del punto singu1ar EC (CE), unión entre la espiral y el círculo, se les denota X_C y Y_C:

$$X_C = L_e\left(1 - \frac{{\theta_e}^2}{5 \cdot 2!} + \frac{{\theta_e}^4}{9 \cdot 4!} - \frac{{\theta_e}^6}{13 \cdot 6!}\right)$$

$$Y_C = L_e\left(\frac{\theta_e}{3} - \frac{{\theta_e}^3}{7 \cdot 3!} + \frac{{\theta_e}^5}{11 \cdot 5!} - \frac{{\theta_e}^7}{15 \cdot 7!}\right)$$

Normalmente el cálculo con los cuatro primeros términos de la serie es suficiente y las ecuaciones resultantes son:

$$X_C = L_e\left(1 - \frac{{\theta_e}^2}{10} + \frac{{\theta_e}^4}{216} - \frac{{\theta_e}^6}{9360}\right)$$

$$Y_C = L_e\left(\frac{\theta_e}{3} - \frac{{\theta_e}^3}{42} + \frac{{\theta_e}^5}{1320} - \frac{{\theta_e}^7}{75600}\right)$$

Tanto la definición por el parámetro como por su longitud, pueden emplearse indistintamente aunque en Venezuela se utiliza más la segunda. Para replanteos expeditivos o para representaciones gráficas a escala grande, se emplean ventajosamente las fórmulas aproximadas que se obtienen desechando los términos de la serie más allá del primero; para clotoides definidas por su longitud tenemos:

$$X \approx L \quad ; \quad Y \approx L\,\frac{\theta}{3}$$

Para aquellas definidas por su parámetro:

$$X \approx A\sqrt{2\theta} \quad ; \quad Y \approx A\,\frac{\sqrt{2 \cdot \theta^3}}{3}$$

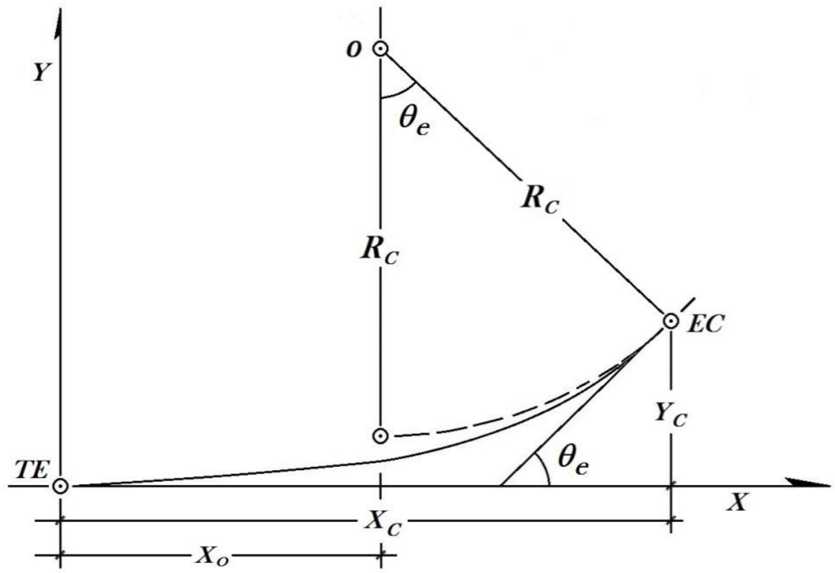

Figura 50 Algunos elementos geométricos de la Curva de Transición.

PARÁMETROS DE INSERCIÓN DE LA CLOTOIDE

Para que pueda introducirse un arco de transición de longitud $\boldsymbol{L_e}$, antecediendo a un arco de círculo de radio R_C, en tangencia con un alineamiento recto, es necesario que el círculo sufra un desplazamiento tanto en el sentido de las abscisas como en el de las ordenadas, de manera tal que se posibilite la inserción de dicho arco. También puede insertarse el arco de transición separando la tangente del círculo y conservando la posición planimétrica del centro de giro, o disminuyendo el radio de curvatura en una magnitud conveniente. Se prefiere, usualmente, a) mantener la posición de la tangente para no afectar el diseño de las demás curvas y b) conservar el radio de curvatura para no introducir valores no enteros que difieran de los valores normalizados.

El desplazamiento radial en el sentido de las ordenadas recibe por nombre ***retranqueo***, por analogía con el término arquitectónico, y se le denota comúnmente como $\Delta\boldsymbol{R_C}$. Se le interpreta como la distancia que el vehículo se separa del eje de geometría del arco de círculo utilizado como acuerdo, al describir el conductor su propia transición. La curva de transición, que divide al retranqueo en partes casi iguales, ha desarrollado hasta ese punto una longitud que, proyectada sobre la tangente, representa la distancia axial $\boldsymbol{X_O}$ a la que se encuentra el origen de la transición. En la figura de la página siguiente el retranqueo es:

$$\Delta \boldsymbol{R_C} = \boldsymbol{Y_C} - \boldsymbol{R_C}(\mathbf{1} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta_e})$$

mientras que la abscisa del centro de giro será:

$$\boldsymbol{X_O} = \boldsymbol{X_C} - \boldsymbol{R_C}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta_e}$$

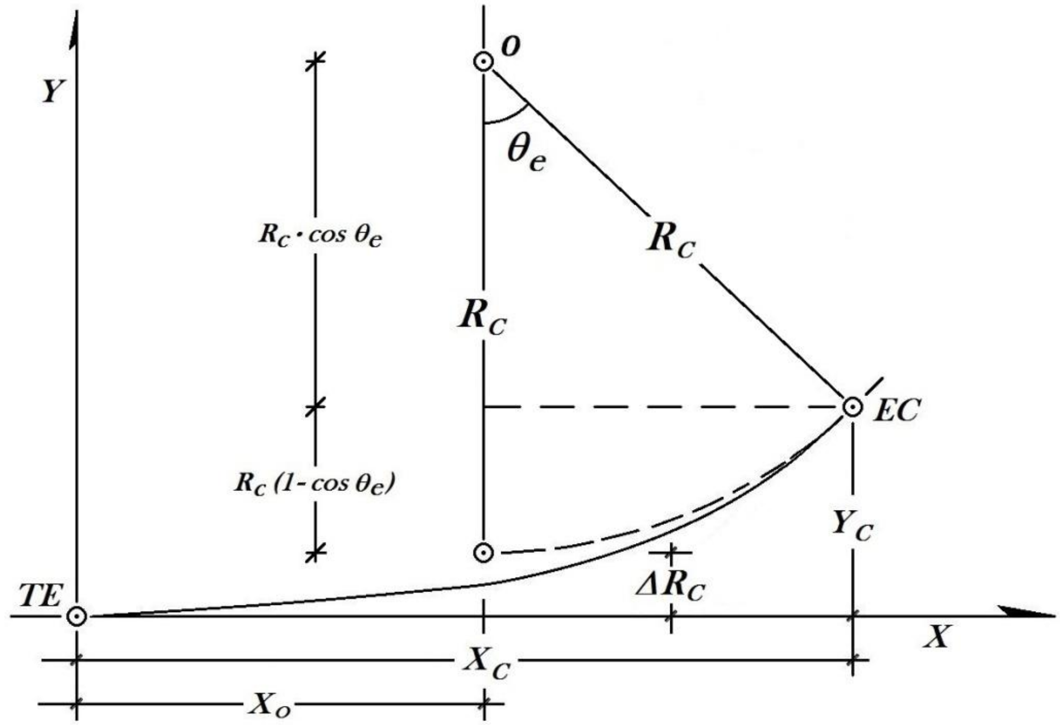

Figura 51 Desplazamientos geométricos del círculo que posibilitan la inserción del arco de transición.

Si las transiciones de entrada y salida fuesen idénticas, igual parámetro, el valor de la sub-tangente $\boldsymbol{T_T}$**,** que representa la distancia del vértice al punto inicio de las transiciones, será:

$$\boldsymbol{T_T} = \boldsymbol{X_O} + (\boldsymbol{R_C} + \Delta\boldsymbol{R_C})\,\mathbf{tan}\frac{\Delta}{\mathbf{2}}$$

y la externa $\boldsymbol{E}$, tiene la fórmula:

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{R_C} + \Delta\boldsymbol{R_C})\,\mathbf{sec}\frac{\Delta}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{R_C}$$

En la página siguiente, ***Figura 52***, se muestra el acuerdo horizontal que se logra insertando arcos idénticos de clotoide antecediendo y siguiendo al arco circular de radio $\boldsymbol{R_C}$. El empleo de arcos de transición de distinto parámetro, cuya solución tanto geométrica como dinámica es factible, tiene su aplicación más difundida en los nuevos enlaces de vías preexistentes.

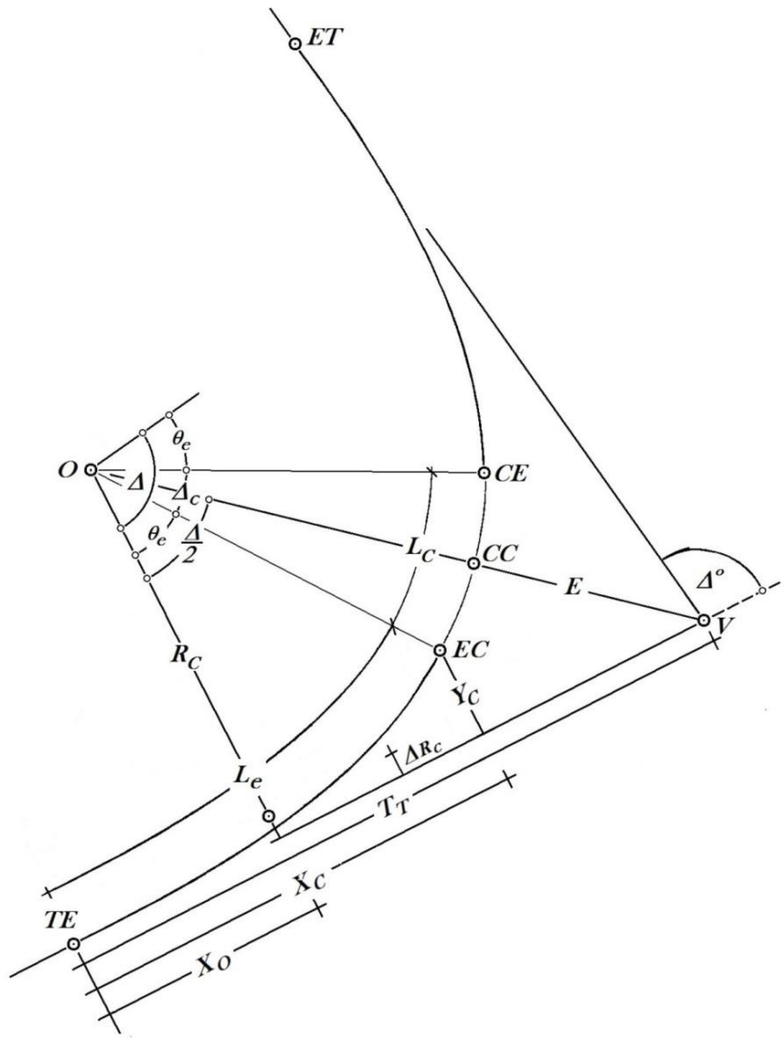

Figura 52 Elementos geométricos en Acuerdo Horizontal Espiralizado.

TE : Unión Tangente–Espiral	*ET : Unión Espiral–Tangente*
EC : Unión Espiral–Círculo	*CE : Unión Círculo–Espiral*
CC : Centro del Acuerdo Horizontal	*O : Centro de Giro*
Rc : Radio de Curvatura del Círculo	*ΔRc: Retranqueo*
V : Vértice de las Tangentes	*Δ : Ángulo de Deflexión*
Δc : Ángulo del Arco Circular	*Le : Longitud del Arco Clotoidal*
Lc : Longitud del Arco Circular	*θe : Ángulo Tangencial en EC (y en CE)*
Xc : Abscisa de EC (y de CE)	*Yc : Ordenada de EC (y de CE)*
Xo : Abscisa del Centro de Giro	*Tt : Subtangente Total*
E : Externa	

El ángulo al centro Δ_C, subtendido por el arco de círculo de longitud L_C, está asociado al ángulo de deflexión por la relación:

$$\Delta_C = \Delta - 2\,\boldsymbol{\theta_e}$$

En el extremo distal de la clotoide $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L_e}$ y $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_e}$ por lo que:

$$\boldsymbol{\theta_e} = \frac{(\boldsymbol{L_e})^2}{2 \cdot \boldsymbol{A}^2} = \frac{(\boldsymbol{L_e})^2}{2 \cdot \boldsymbol{R_C} \cdot \boldsymbol{L_e}} = \frac{\boldsymbol{L_e}}{2 \cdot \boldsymbol{R_C}} \qquad \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{\theta_e}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{L_e}}{\boldsymbol{R_C}}\,\frac{\mathbf{90}}{\boldsymbol{\pi}}$$

La longitud total del acuerdo es:

$$\boldsymbol{L_T} = \boldsymbol{L_e} + \boldsymbol{L_C} + \boldsymbol{L_e} = 2\boldsymbol{L_e} + \boldsymbol{L_C}$$

LONGITUD MÍNIMA DE LA TRANSICIÓN DE CURVATURA

Sea un vehículo que describe, con velocidad constante $\boldsymbol{v}$, una trayectoria recta sobre una superficie horizontal; si en un momento dado cambia su trayectoria a la de un arco clotoidal, el radio de curvatura, que tendía a infinito al comienzo de la transición, decrecerá en una proporción inversa al arco recorrido. Al final de la transición la aceleración centrípeta será:

$$\boldsymbol{a_C} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R_C}}$$

Se tiene por la ecuación intrínseca de la espiral que:

$$\boldsymbol{R_c} \cdot \boldsymbol{L_e} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{L}$$

por lo que:

$$\boldsymbol{R_c} = \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{L}}{\boldsymbol{L_e}}$$

Sustituyendo $\boldsymbol{R_c}$ en la primera ecuación se tiene:

$$\boldsymbol{a_C} = \frac{\boldsymbol{v}^2 \cdot \boldsymbol{L_e}}{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{L}}$$

Pero $\boldsymbol{L_e} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}$, de donde:

$$\boldsymbol{a_C} = \frac{\boldsymbol{v}^2 \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}}{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{L}} = \frac{\boldsymbol{v}^3 \cdot \boldsymbol{t}}{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{L}}$$

Dado que la variación de la aceleración centrípeta, mejor la rata de variación de la aceleración centrípeta con respecto al tiempo, debe ser una constante $\frac{\boldsymbol{da_C}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{c}$ resulta:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{v^3}}{\boldsymbol{R \cdot L}} = \frac{\boldsymbol{v^3}}{\boldsymbol{A^2}} = \frac{\boldsymbol{v^3}}{\boldsymbol{R_C \cdot L_e}}$$

y finalmente:

$$\boldsymbol{L_e} = \frac{\boldsymbol{v^3}}{\boldsymbol{c \cdot R_C}}$$

La rata de cambio de la aceleración es entonces una expresión del empuje radial que sufren los pasajeros por efecto de la variación de la fuerza centrípeta y en consecuencia puede expresarse como una medida de la comodidad experimentada al recorrer la espiral. El rango de valores de este coeficiente, al que también se le denota como "choque específico" ha sido determinado empíricamente desde que las transiciones, en los años finales del siglo diecinueve, se emplearon en el guiado de los ferrocarriles. Sin embargo, un valor de 3 pie/seg^3, muy utilizado en ferrovías, resulta excesivo para carreteras, mientras que 1 pie/seg^3 origina clotoides muy largas que pueden motivar aumentos de la velocidad directriz.

El ingeniero Joseph Barnett, hacia 1936, recomendó en su publicación clásica "Curvas con Transiciones para Caminos" un choque específico de 2 pie/seg^3, valor aproximado a 0,6 m/seg^3 que ha sido ampliamente aceptado. Si expresamos la velocidad en Km/h resulta una longitud de espiral dada por la expresión:

$$\boldsymbol{L_e} = \frac{\boldsymbol{v^3}}{\boldsymbol{(3,6)^3 \cdot 0,6R_C}}$$

$$\boldsymbol{L_e} \approx \frac{\boldsymbol{v^3}}{\boldsymbol{28\,R_C}} \approx \boldsymbol{0,036}\ \frac{\boldsymbol{v^3}}{\boldsymbol{R_C}}$$

Esta expresión, que se conoce como *Fórmula de Barnett*, presupone al vehículo desplazándose sobre una superficie horizontal, de donde inferimos que la longitud calculada para la espiral puede ser reducida si se toma en cuenta la cantidad de fuerza centrípeta absorbida por el peralte de la curva. El planteamiento teórico es el siguiente:

Cuando un vehículo transita a velocidad $\boldsymbol{v}$ una trayectoria clotoidal peraltada se tiene que en el extremo de un arco $\boldsymbol{L}$ la inclinación transversal de la calzada no compensa toda la fuerza centrípeta y la aceleración neta $\boldsymbol{a_n}$ –diferencia entre la total y aquella compensada por el peralte− puede escribirse:

$$a_n = \frac{v^2}{R} - g \cdot p_L$$

donde:

p_L: Peralte desarrollado en el arco L

R : Radio de curvatura en el extremo del arco L

g : Aceleración de la gravedad

La rata de variación de la aceleración, tolerable por los pasajeros, resulta de dividir la aceleración neta por el tiempo t que el vehículo tarda en recorrer el arco L:

$$a_n = c = \frac{v^2}{R \cdot t} - \frac{g \cdot p_L}{t}$$

pero: $t = L/v$ y entonces,

$$c = \frac{v^2 \cdot v}{R \cdot L} - \frac{g \cdot p_L \cdot v}{L}$$

también $p_L = p\,(L/L_e)$, de donde:

$$c = \frac{v^3}{R \cdot L} - \frac{g \cdot p \cdot v}{L_e}$$

Sustituyendo al producto $R \cdot L$ por su equivalente $R_C \cdot L_e$:

$$c = \frac{v^3}{R_C \cdot L_e} - \frac{g \cdot p \cdot v}{L_e}$$

despejando L_e:

$$L_e = \frac{v^3}{R_C \cdot c} - \frac{g \cdot p \cdot v}{c}$$

Esta expresión, más conocida como *Fórmula de Smirnoff*[13] es empleada para calcular longitudes mínimas de arcos de clotoides definidas por su longitud. Si en ella sustituimos a la aceleración de la gravedad por su valor 9,81 m/seg^2 y expresamos la velocidad en Km/h se tiene:

$$L_e(s) = 0{,}02143347\ \frac{V^3}{c \cdot R_C} - 2{,}725\ \frac{p \cdot V}{c}$$

La Normativa Vial Venezolana adopta un choque específico de 0,41 m/seg^3 por lo que la expresión deviene en:

$$L_{e(S)} = 0{,}0523\ \frac{V^3}{R_C} - 6{,}6463\, p \cdot V$$

---

13 *Desarrollada por ruso-estadounidense Michael V. Smirnoff y publicada en el estudio "Analytical Method of Determining the Length of Transition Spiral" para la Sociedad Norteamericana de Ingenieros Civiles en 1949.*

La siguiente tabla se elaboró seleccionando de la tabla de ‘Longitudes Normalizadas de Transiciones definidas por su Longitud’ de las "Normas para el Proyecto de Carreteras" los valores correspondientes a los radios de curvatura más comunes:

Radio (m)	*Ancho de rotación*		
	1 canal	*2 canales*	*3 canales*
50	55	90	120
60	60	95	130
70	60	100	135
80	65	100	140
90	70	105	145
100	70	110	145
120	75	115	155
140	80	120	160
160	85	125	165
180	85	130	170
200	90	130	175
250	90	135	180
300	90	135	180
350	90	135	180
400	90	130	170
450	85	120	155
500	85	110	140
550	80	105	130
600	80	100	120
650	75	95	115
700	70	90	105
750	70	85	100
800	65	80	95
900	60	75	90
1000	55	70	85
1200	45	60	75
2000	30	30	45
2500	30	30	45
3000	30	30	45

Tabla 17 Longitudes Normalizadas para Transiciones de Curvatura[14]
Y Peralte de las Normas Viales Venezolanas (Extracto).

[14] *Los valores de Radio Normalizados por debajo de las líneas horizontales no requieren Transiciones de Curvatura en virtud de que el Retranqueo puede realizarse dentro del carril de circulación.*

Los valores de la tabla anterior ***deben*** ser empleados en los proyectos viales y sólo en aquellos casos donde el encaje del arco sea impracticable, se emplearán transiciones menores. En tales condiciones las ***N.V.V***. requieren la satisfacción de los requisitos siguientes:

1) $\boldsymbol{L_e \geq 30\,m}$

2) $\boldsymbol{L_e \geq 0,0523\,\frac{V^3}{R_C} - 6,6463\,p\,\cdot V}$ $(\boldsymbol{Si\ R_C \leq 500\,m})$

3) $\boldsymbol{L_e} \geq \mathbf{a \cdot p \cdot n}$ (para ancho de rotación de 1 canal[15])

Se tomará como $\boldsymbol{L_e}$ al mayor de los tres valores.

El ejemplo siguiente permite aplicar los criterios citados:

Velocidad de proyecto: $\boldsymbol{90\,Km/h}$

Calzada única: 2 canales de $\boldsymbol{3,60\,m}$ c/u

Radio del arco circular: $\boldsymbol{250\,m}$

Se pide:

a) L_e normalizada de acuerdo a las N.V.V.
b) L_e mínima según las N.V.V.

Solución:

a) En base al criterio de rotación para calzadas únicas la longitud normalizada se obtiene por la tabla de la página 137 en la intersección de la columna "1 canal" con la fila 250 (radio):

$$\boldsymbol{L_{e\ normal} = 90\ m}$$

b) Longitud mínima:

1) $\boldsymbol{L_e \geq 30\,m}$

2) $\boldsymbol{L_e \geq 0,0523\,\frac{v^3}{R_C} - 6,6463\,p\,\cdot v}$

$\boldsymbol{p = 7,5}$ % de acuerdo al valor normalizado de la N.V.V.

$\boldsymbol{L_e \geq 0,0523\,\frac{90^3}{350} - 6,6463\,(0,075)\,(90) = 64,07\,m}$

3) $\boldsymbol{L_e \geq a \cdot p \cdot n}$

$\boldsymbol{a = 3,60\,m}$; $\boldsymbol{n = 650/3}$

$\boldsymbol{L_e \geq a \cdot p \cdot n = (3,60)\,(0,075)\,(650/3) = 58,50\,m}$

[15] *Para carreteras multicanal ver Fórmulas a emplear en la Nota al pie de la página 110.*

La longitud mínima de la transición será la mayor de las tres, esto es $\boldsymbol{L_e = 64,07\,m}$. Esta elección está en clara concordancia con el criterio para la distribución del peralte en la transición de curvatura, aspecto que pasamos a explicar seguidamente:

DISTRIBUCIÓN DEL PERALTE EN LA CLOTOIDE

El desarrollo del peralte se rige por una ley lineal y para lograr este cometido se hace coincidir el inicio de la transición con el punto $\boldsymbol{TE}$ y su final con el punto de unión de la clotoide y el arco circular, $\boldsymbol{EC}$ con los consiguientes incrementos de peralte proporcionales a las longitudes de arco recorridas. Si el paso por la transición se realiza a velocidad constante (como lo exige el análisis teórico) los incrementos de aceleración obedecerán a una ley monótona creciente y la conducción resultará cómoda y racional aunque la aceleración tangencial no será totalmente absorbida por el peralte. La condición de equilibrio del móvil la suplirá, a todo lo largo de la transición, la fricción movilizada.

De lo expuesto en el párrafo anterior se infiere que si la longitud de Transición de peralte resultara superior a la de Transición de Curvatura, habría necesidad de a) comenzar a desarrollarla en el tramo recto b) concluir su desarrollo en el tramo circular o c) combinar las proposiciones anteriores, En cualquiera de los casos la solución resultante es insatisfactoria desde el punto de vista dinámico por lo que la distribución del peralte debe hacerse conjuntamente con la transición de curvatura tal como se indica en el texto y gráficos de las páginas 43 a 45 de estas notas.

EL ANGULO TANGENCIAL COMO PARAMETRO DE INSERCIÓN DE LA ESPIRAL

Para que pueda ser utilizada una radiode como curva de transición debe cumplirse que en los puntos de unión con los elementos geométricos a enlazar (recta y círculo, círculo y círculo, recta y recta), la tangente sea común y la curvatura coincidente con la del punto del elemento que une. Esta condición ***sine qua non*** da lugar a una correlación angular que restringe la posibilidad de inserción de los arcos de transición dado que no siempre el encaje es geométricamente posible.

Tal como se expresa en la página 139, el ángulo tangencial $\boldsymbol{\theta}$ en el punto $\boldsymbol{EC}$ de un arco de clotoide representa la diferencia de acimutes de las tangentes en los extremos de dicho arco. Si se intenta diseñar un acuerdo entre dos alineamientos rectos utilizando para ello arcos simétricos de clotoide tendríamos que en el desarrollo de la longitud de dichos arcos para alcanzar la curvatura constante del círculo, será preciso reducir el ángulo disponible para el arco circular en $\mathbf{2}\,\boldsymbol{\theta_e}$. Si denominamos Δ al ángulo de deflexión entre los alineamientos y $\Delta_{\boldsymbol{C}}$ al ángulo al centro del arco circular tendríamos que $\Delta = \Delta_{\boldsymbol{C}} + \mathbf{2}\,\boldsymbol{\theta_e}$ determinándose así tres posibles relaciones entre la deflexión media y $\boldsymbol{\theta_e}$:

$$1)\quad \boldsymbol{\theta_e} < \frac{\Delta}{\mathbf{2}}$$

$$2)\quad \boldsymbol{\theta_e} = \frac{\Delta}{\mathbf{2}}$$

$$3)\quad \boldsymbol{\theta_e} > \frac{\Delta}{\mathbf{2}}$$

En el primer caso los arcos de transición habrían ocupado $\mathbf{2}\,\boldsymbol{\theta_e}$ de la deflexión total y estarían enlazados a un arco de círculo cuya longitud $\boldsymbol{L_C}$ viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{L_C} = \Delta_{\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{R_C}$$

con $\Delta_{\boldsymbol{C}}$ en radianes y $\boldsymbol{R_C}$ en metros. Para determinar la longitud del arco circular con el ángulo al centro expresado en grados sexagesimales la igualdad a utilizar es la siguiente:

$$\boldsymbol{L_C} = \Delta_{\boldsymbol{C}}{}^{\circ}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180^{\circ}}}\,\boldsymbol{R_C}$$

En la relación 2 el encaje de los arcos de transición ha determinado la supresión del arco circular quedando éste reducido al punto $\boldsymbol{ECE}$. A este acuerdo se le denomina de ***Transición Total*** o ***Clotoide de Vértice*** por presentar su diagrama de curvatura una angulosidad que semeja un triángulo isósceles. En el pasado el diseño con transición total se llegó a considerar una solución "elegante" para los acuerdos pero modernamente poco se le emplea por razones constructivas y dinámicas.

Cuando el resultado de diferenciar la deflexión media y el ángulo tangencial es un valor negativo, el acuerdo resulta geométricamente irrealizable y la clotoide no puede ser encajada interceptándose con la bisectriz sin haber alcanzado su longitud y consecuentemente sin haber desarrollado la Longitud de Transición de peralte. En la Figura 53 de la página siguiente se muestran los casos gráficamente.

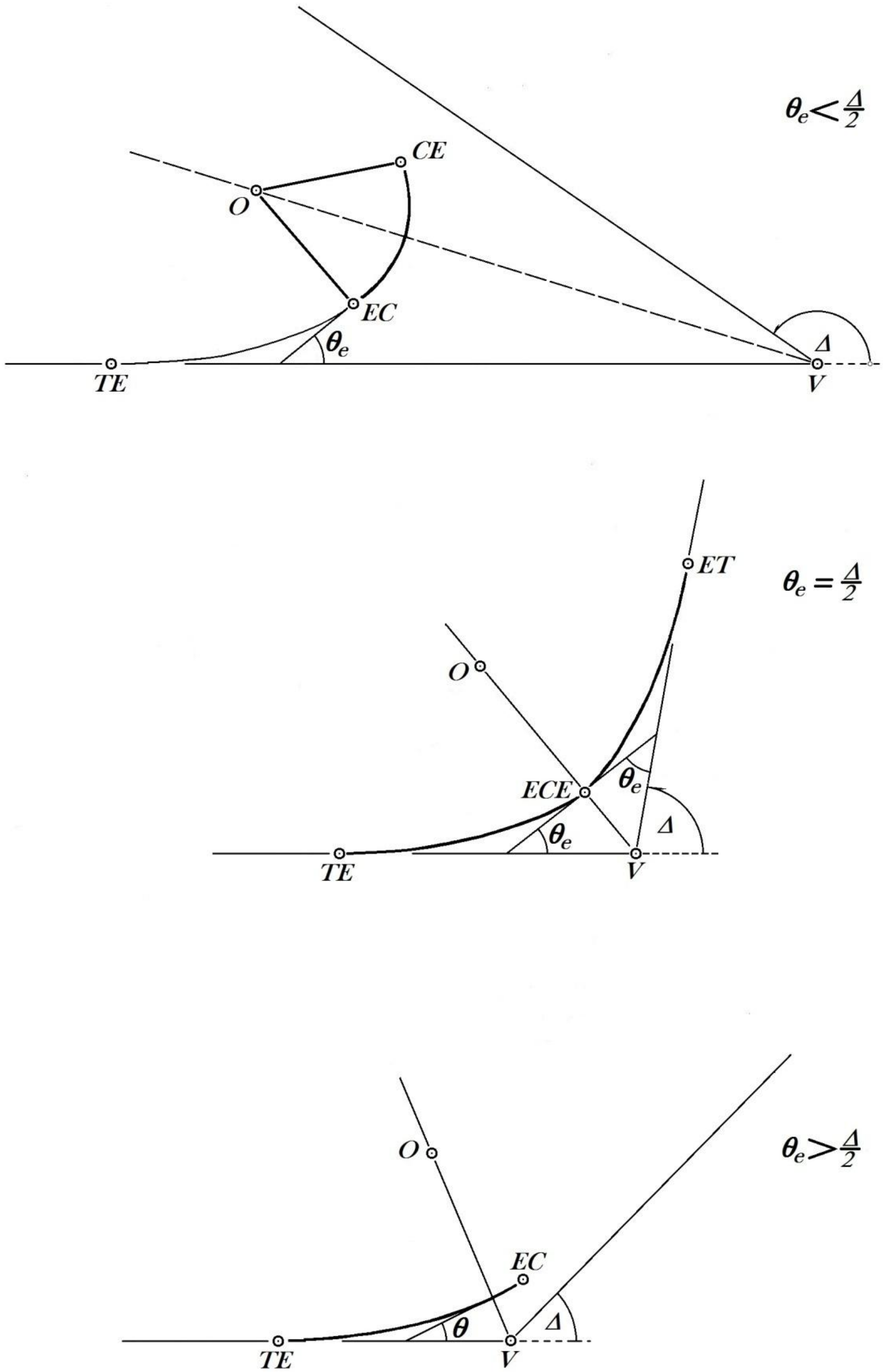

Figura 53 El Ángulo Tangencial en el extremo final de la Clotoide y su relación con el ángulo de deflexión.

La ocurrencia del último caso es frecuente cuando las deflexiones de los alineamientos son pequeñas y no siempre su solución se puede alcanzar dado que para lograr que el parámetro de inserción $\boldsymbol{X_O}$ aumente para dar cabida a la espiral, es menester aumentar el radio de curvatura que a su vez incidiría sobre el peralte y sobre la propia longitud de la espiral.

También es posible modificar el ángulo de deflexión, aumentándolo, pero la rotación de las tangentes sobre los vértices antecedente y siguiente, pudiera resultar impracticable. En ese momento estará plenamente justificado diseñar el acuerdo con un arco circular simple.

El primer caso merece una explicación más detallada pues no siempre el hecho de que exista arco circular es garantía de un buen diseño. Particular atención debe conferirse a la longitud de este tramo pues si resultara muy corto, tanto como para que el conductor no apreciara que lo transita, tendría lugar una dinámica similar a la de la transición total. En términos de percepción, convendría que la longitud del tramo circular no fuese menor que la distancia que recorre el vehículo en un (1) segundo cuando se desplaza a la velocidad de proyecto. Si así no fuese debería recalcularse la longitud de la espiral aumentando ligeramente el choque específico pero sin alcanzar valores de arco de transición más pequeños que la longitud mínima de Transición de Peralte. Si aún esto resultara insuficiente habrá que aumentar el radio de curvatura, dejando invariable el choque específico, hasta conseguir la longitud conveniente de $\boldsymbol{L_C}$. Veamos algunos ejemplos relacionados:

$\boldsymbol{Ejemplo\ caso\ 1}$: $\quad \boldsymbol{\theta_e < \frac{\Delta}{2}}$

$\Delta° = \mathbf{30°}$

$\boldsymbol{V_P = 80\ Km/h}$

$\boldsymbol{R_C = 250\ m}$

$\boldsymbol{p = 9{,}0}\ \%$

$\boldsymbol{a = 3{,}60\ m}$

Se desea conocer:

a) Longitud mínima de transición.

b) Longitud del arco circular.

c) Longitud total del acuerdo horizontal.

Solución:

a) Longitud mínima de transición: las Normas Viales Venezolanas prescriben la verificación de tres requisitos (ver página 138) para permitir el uso de transiciones menores a las normalizadas:

1) $\boldsymbol{L_e \geq 30\,m}$

2) $\boldsymbol{L_e \geq 0,0523\,\frac{(Vp)^3}{R_C} - 6,6463 \cdot p \cdot Vp} \quad (\boldsymbol{Si\ R_C \leq 500\,m})$

3) $\boldsymbol{L_e \geq a \cdot p \cdot n}$ (para ancho de rotación de un canal)

Se tomará como $\boldsymbol{L_e}$ al mayor de los tres valores. El primero de los requisitos es de fácil cumplimiento. El segundo corresponde a la longitud derivada de la ***Fórmula de Smirnoff*** cuando el choque específico es $\boldsymbol{c \approx 0,4\,m/seg^3}$:

$$\boldsymbol{L_e \geq 0,0523\,\frac{(80)^3}{250} - 6,6463(0,09)(80)}$$

$$\boldsymbol{L_e = 59,26\,m}$$

La tercera opción corresponde a la longitud mínima de transición de peralte:

$$\boldsymbol{L_e \geq a \cdot p \cdot n \geq 3,60\,(0,09)\,(200)}$$

$$\boldsymbol{L_e = 64,80\,m}$$

Se asume $\boldsymbol{L_e}$ como el último valor por ser el mayor de los tres y se calcula el ángulo tangencial:

$$\boldsymbol{\theta_e = \frac{L_e}{2 \cdot R_C} = \frac{64,80}{2 \cdot 250} = 0,1296\,rad}$$

La longitud del arco circular será:

$$\boldsymbol{L_C = R_C \cdot (\Delta - 2\theta_e)}$$

$$\Delta = \boldsymbol{30°\,\frac{\pi}{180°} = 0,523598775\,rad}$$

$$\boldsymbol{L_C = 250 \cdot \left(0,523598775 - 2(0,1296)\right)}$$

$$\boldsymbol{L_C = 66,10\,m}$$

Para que el diseño resulte satisfactorio debe cumplirse que:

$$\boldsymbol{L_C \geq \frac{V_P}{3,6}}$$

$$\boldsymbol{L_C \geq \frac{80}{3,6} = 22,22\ m} \qquad \underline{\boldsymbol{ok}}$$

El tiempo empleado en recorrer el arco circular es:

$$t = \frac{L_C}{\frac{V_P}{3,6}} \approx 3\ seg$$

La longitud total del acuerdo:

$$L_T = 2L_e + L_C$$

$$L_T = 2\,(64,80) + 66,10 = 195,70\ m$$

El diagrama de curvatura es el que sigue:

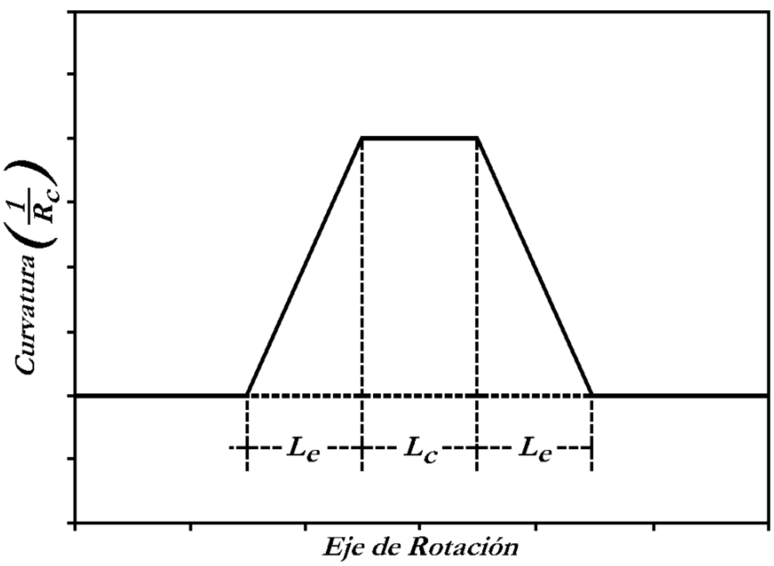

Figura 54 Diagrama de Curvatura. Clotoides Simétricas.

$\boldsymbol{Ejemplo\ caso\ 2}$: $\theta_e = \frac{\Delta}{2}$

$\Delta° = 21°\,35'\,10''$

$V_P = 75\ Km/h$

$R_C = 200\ m$

$p = 10\ \%$

$a = 3,35m$

$n = \frac{200}{3} + \frac{5}{3}V_p$

Se desea conocer:

a) Longitud de transición según criterio de Barnett,

b) Longitud del arco circular y

c) Longitud total del acuerdo horizontal.

Solución:

Barnett estimó que la longitud de la espiral será aquella cuyo choque específico sea $\boldsymbol{c = 0,6\, m/seg^3}$, así tenemos:

$$\boldsymbol{L_e = \frac{V^3}{c \cdot R_c} = \frac{(75)^{\,3}}{0,6\,(200)\,(3,6)^3} = 75,35m}$$

Es imprescindible determinar la longitud de transición de peralte para compararla con la de transición de curvatura:

$$\boldsymbol{L_e \geq a \cdot p \cdot n}$$

$$\boldsymbol{a \cdot p \cdot n \geq 3,35\,(0,10)\,(575/3) = 64,21\,m}$$

$$\boldsymbol{L_e} > LTp \qquad \underline{\boldsymbol{ok}}$$

El ángulo tangencial es:

$$\boldsymbol{\theta_e = \frac{L_e}{2 \cdot R_c} = \frac{75,35}{2 \cdot 200} = 0,188375\,rad}$$

El ángulo al centro del arco circular será:

$$\Delta_{\boldsymbol{C}} = \Delta\ \boldsymbol{-2\,\theta_e}$$

$$\Delta = \Delta^{\circ}\,\boldsymbol{\frac{\pi}{180^{\circ}}} = \boldsymbol{0,3767487116\,rad}$$

$$\Delta_{\mathbf{C}} = \mathbf{0\ rad}$$

Siendo nulo el valor de Δ_C la longitud del arco circular también lo es y el diagrama de curvatura del enlace es:

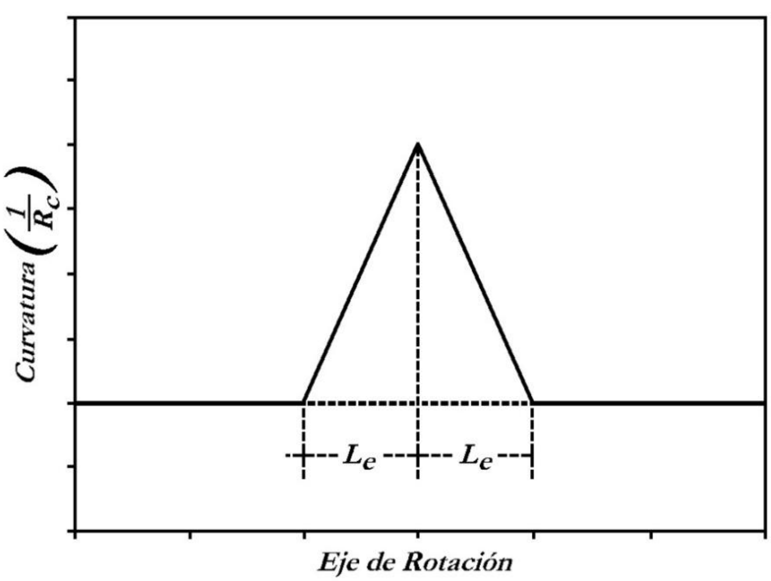

Figura 55 Diagrama de Curvatura. Clotoide de Vértice.

$\boldsymbol{Ejemplo\ caso\ 3}$: $\boldsymbol{\theta_e > \frac{\Delta}{2}}$

Si con los datos geométricos del ejemplo anterior se intenta diseñar un enlace horizontal empleando la longitud normalizada de la espiral según las Normativa Vial Venezolana, el acuerdo horizontal no será posible:

Longitud normalizada (1 carril y Rc = 200 m): $\boldsymbol{L_e = 90\ m}$

$$\boldsymbol{\theta_e = \frac{L_e}{2 \cdot R_c} = \frac{90}{2 \cdot 200} = 0{,}225\ rad}$$

$$\boldsymbol{\Delta - 2\,\theta_e = 0{,}3767487116 - 0{,}45 = -0{,}073...\ rad}$$

El signo negativo indica que las clotoides se entrecruzan en un punto donde aún no han alcanzado la curvatura del círculo. Si el radio aumenta, por ejemplo a $\boldsymbol{300\ m}$, el ángulo tangencial se reduce permaneciendo invariable la longitud de transición:

Longitud normalizada (1 canal y Rc =300 m): $\boldsymbol{L_e = 90\ m}$

$$\boldsymbol{\theta_e = \frac{L_e}{2 \cdot R_c} = \frac{90}{2 \cdot 300} = 0{,}15\ rad}$$

$$\boldsymbol{\Delta - 2\,\theta_e = \Delta_C = 0{,}3767487116 - 0{,}30}$$

$$\boldsymbol{\Delta_C = 0{,}0767487116\ rad}$$

La longitud del arco circular es:

$$\boldsymbol{L_C = R_c \cdot \Delta_C = 23{,}02\ m}$$

El tiempo en que el vehículo transita por el arco circular debe ser igual o mayor a un (1) segundo:

$$\boldsymbol{t = \frac{espacio}{velocidad} = \frac{L_C}{V} = \frac{(3{,}60)\,L_C}{V} \approx 1\ seg \quad \underline{ok}}$$

De los ejemplos analizados se deduce que la longitud mínima de la transición no es un valor único, sino que por el contrario cada autor, sustentando un criterio propio, o cada administración pública, asumiendo para sí la aplicación de esos criterios, dará un matiz particular a este tan debatido tema de la ingeniería vial de la misma manera que la longitud de la espiral, el ángulo tangencial y el retranqueo han sido objeto de controversia técnica en lo que a sus valores mínimos se refiere. Los ingenieros han esgrimido, en una u otra dirección, las más diversas opiniones, muchas de ellas encontradas. En todo caso, lo importante es el apego racional a la normativa legal y la sensata aplicación del sentido común en la toma de decisiones sobre los casos que esta normativa, que amerita un impostergable refrescamiento, no contemple.

A continuación, ya como aspecto final de este tema, se incluye un ejemplo resuelto donde se abarcan la mayoría de los criterios y cálculos relacionados con la transición de curvatura:

Se desea diseñar un acuerdo horizontal con transiciones entre las tangentes cuyas direcciones se indican. Determine los elementos geométricos $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{\theta}$ de un $\boldsymbol{PSC}$ situado a 50 metros del origen de la transición. Asimismo calcule $\boldsymbol{\theta_e}$, $\boldsymbol{T_T}$, $\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_C}$, $\boldsymbol{Y_C}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{L_C}$, $\boldsymbol{L_T}$ y las coordenadas de los Ptos. Singulares $\boldsymbol{TE}$, $\boldsymbol{EC}$, $\boldsymbol{CC}$, $\boldsymbol{CE}$, $\boldsymbol{ET}$ y $\boldsymbol{O}$.

Datos:

$$\boldsymbol{A = 150\,m}$$

$$\boldsymbol{R_C = 200\,m}$$

$$\boldsymbol{R_{V1}^{V2} = S\,80°32'16"\,W}$$

$$\boldsymbol{R_{V2}^{V3} = N\,53°07'48"\,W}$$

$$\boldsymbol{Coordenadas\ V2\ \begin{cases} N: 1.900,00\,m \\ E: 2.000,00\,m \end{cases}}$$

Solución:

El primer paso debería ser la representación gráfica de los alineamientos a enlazar. El dato básico para lograr este cometido lo constituyen las direcciones angulares de las tangentes. La escala de representación es un elemento a determinar y siendo el radio de curvatura la magnitud más inmediata de que disponemos lo elegiremos como valor a representar, asumiendo que la dimensión del espacio disponible es de $\boldsymbol{5\,cm}$:

$$\boldsymbol{Escala = \frac{D}{d} = \frac{250\,m}{0{,}05\,m} = 5.000}$$

Con las direcciones de los alineamientos elaboramos un pequeño plano a escala 1:5000 contentivo de los principales elementos geométricos y sus relaciones angulares, acimutes, rumbos y deflexión. En la página siguiente se incluye la representación gráfica.

Seguidamente determinamos la longitud de transición empleando para ello el Parámetro de la clotoide:

$$\boldsymbol{A^2 = L_e \cdot R_c \ \therefore\ L_e = \frac{A^2}{R_c} = \frac{(150)^2}{250} = 90\,m}$$

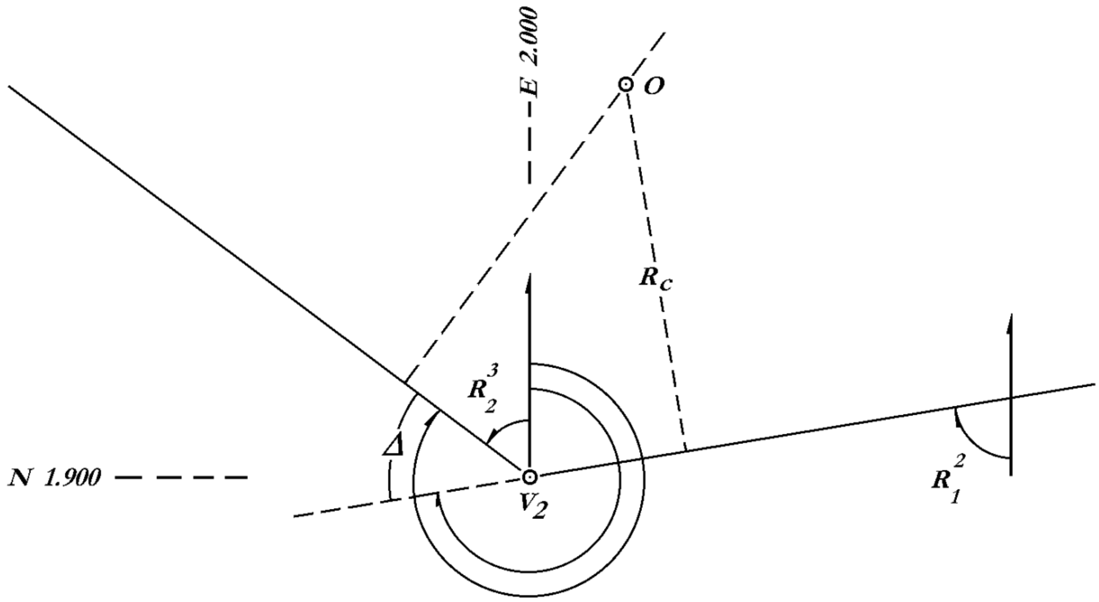

Figura 56 Representación gráfica de los alineamientos mostrando Sus principales relaciones angulares. Escala 1:5000.

El ángulo tangencial en el punto $\boldsymbol{EC}$ es:

$$\theta_e = \frac{L_e}{2 \cdot R_C} = \frac{90}{2(250)} = 0,18000000000\ rad$$

El ángulo tangencial en el extremo del arco clotoidal de longitud $\mathbf{50}\ \boldsymbol{m}$ será:

$$\theta = \theta_e \left(\frac{L}{L_e}\right)^2 = 0,18 \left(\frac{50}{90}\right) = 0,055555555555\ rad$$

y el radio de curvatura en el referido extremo es:

$$A^2 = R \cdot L \quad \therefore \quad R = \frac{A^2}{L} = \frac{(150)^2}{50} = 450\ m$$

Las coordenadas cartesianas del $\boldsymbol{PSC}$ son:

$$X = L\left(1 - \frac{\theta^2}{10} + \frac{\theta^4}{216} - \frac{\theta^6}{9360}\right) = 49,98\ m$$

$$Y = L\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{42} + \frac{\theta^5}{1320}\right) = 0,93\ m$$

Y las del punto $\boldsymbol{EC}$:

$$X_C = L_e\left(1 - \frac{{\theta_e}^2}{10} + \frac{{\theta_e}^4}{216} - \frac{{\theta_e}^6}{9360}\right) = 89,71\ m$$

$$Y_C = L_e\left(\frac{\theta_e}{3} - \frac{{\theta_e}^3}{42} + \frac{{\theta_e}^5}{1320}\right) = 5,39\ m$$

La abscisa del centro de giro vale:

$$X_0 = X_C - R_C \cdot sen\,\theta_e$$

$$X_0 = 89,71 - 250 \cdot sen\,(0,18) = 44,95\,m$$

El valor del retranqueo es:

$$\Delta R_C = Y_C - R_C\,(1 - cos\;\theta_e)$$

$$\Delta R_C = 5,39 - 250\,(1 - cos\,(0,18)) = 1,35\,m$$

y una aproximación nos permite verificarlo:

$$\Delta R_C = \frac{(L_e)^2}{24 \cdot R_c} = \frac{(90)^2}{24(250)} 1,35\,m$$

Otra fórmula aproximada:

$$\Delta R_C \approx \frac{Y_C}{4} \approx \frac{5,39}{4} \approx 1,3475\,m$$

La Subtangente total del enlace será:

$$T_T = X_0 + (R_C + \Delta R_C)\,tg(\Delta/2)$$

por lo que se hace necesario calcular la deflexión:

$$\Delta_{V2}° = Ac_{V2}^{V3} - Ac_{V1}^{V2}$$

$$Ac_{V2}^{V3} = 360° - R_{V2}^{V3} = 360° - 53°07'48" = 306°52'12"$$

$$Ac_{V1}^{V2} = 180° + R_{V1}^{V2} = 180° + 80°32'16" = 260°32'16"$$

$$\Delta_{V2}° = 306°52'12'' - 260°32'16'' = 46°19'56''$$

también:

$$\Delta_{V2}° = 180° - R_{V1}^{V2} - R_{V2}^{V3} = 46°\,19'\,56"$$

$$\frac{\Delta_{V2}°}{2} = 23°09'58''$$

luego:

$$T_T = 44,95 + (250 + 1,35)\;tg\,(23°\,09'\,58") = 152,50\,m$$

La externa será:

$$E_{V2} = \frac{R_C + \Delta R_C}{cos(\Delta/2)} - R_C = \frac{250 + 1,35}{cos\,(23°\,09'\,58")} - 250 = 23,39\,m$$

y la longitud del arco circular:

$$L_C = R_C \cdot \Delta_C$$

$$\Delta_C = \Delta° \frac{\pi}{180°} - 2(0,18) = 0,4486498275\ rad$$

$$L_C = R_C \cdot \Delta_C = 112,16\ m$$

$$L_T = 2(90) + 112,16 = 292,16\ m$$

A continuación pasaremos a determinar las coordenadas de los puntos singulares del acuerdo:

a) Punto TE:

$$Rec(T_T; Ac_{V2}^{V1}) \equiv Rec(152,50; 80°\ 32'\ 16") \equiv \begin{cases} P_N: \ \ 25,07\ m \\ P_E: 150,43\ m \end{cases}$$

$$Coordenadas\ TE \begin{cases} N: 1.900,00 + \ \ 25,07 = 1.925,07\ m \\ E: 2.000,00 + 150,43 = 2.150,43\ m \end{cases}$$

b) Punto EC:

$$Acimut_{B'}^{EC} = Ac_{V1}^{V2} + 90°$$

$$Acimut_{B'}^{EC} = 260°\ 32'\ 16" + 90° = 350°\ 32'\ 16"$$

$$Rec(T_T - X_C; Ac_{V2}^{V1}) \equiv Rec(62,79; 80°\ 32'\ 16") \equiv \begin{cases} P_N: 10,32\ m \\ P_E: 61,94\ m \end{cases}$$

$$Coordenadas\ B' \begin{cases} N: 1.900,00 + 10,32 = 1.910,32\ m \\ E: 2.000,00 + 61,94 = 2.061,94\ m \end{cases}$$

$$Rec(Y_C; Ac_{B'}^{EC}) \equiv Rec(5,39; 350°\ 32'\ 16") \equiv \begin{cases} P_N: \ \ 5,32\ m \\ P_E: -0,89\ m \end{cases}$$

$$Coordenadas\ EC \begin{cases} N: 1.910,32 + 5,32 = 1.915,64\ m \\ E: 2.061,94 - 0,89 = 2.061,05\ m \end{cases}$$

c) Punto CC:

$$Ac_{V2}^{O_2} = Ac_{V2}^{V1} - (90° - \Delta°/2)$$

$$Ac_{V2}^{O_2} = 80°\ 32'\ 16" - 90° + 23°\ 09'\ 58" = 13°\ 42'\ 14"$$

$$Rec(E; Ac_{V2}^{O_2}) \equiv Rec(23,39; 13°\ 42'\ 14") \equiv \begin{cases} P_N: 22,72\ m \\ P_E: \ \ 5,54\ m \end{cases}$$

$$Coordenadas\ CC \begin{cases} N: 1.900,00 + 22,72 = 1.922,72\ m \\ E: 2.000,00 + \ \ 5,54 = 2.005,54\ m \end{cases}$$

d) Punto $\boldsymbol{CE}$:

$$Acimut_{C'}^{CE} = Ac_{V2}^{V3} - 270°$$

$$Acimut_{C'}^{CE} = 306° \, 52' \, 12" - 270° = 36° \, 52' \, 12"$$

$$Rec\left(T_T - X_c; Ac_{V2}^{V3}\right) \equiv Rec(62,79; 306° \, 52' \, 12") \equiv \begin{cases} P_N: \; 37,67 \; m \\ P_E: -50,23 \; m \end{cases}$$

$$Coordenadas \; C' \begin{cases} N: 1.900,00 + 37,67 = 1.937,67 \; m \\ E: 2.000,00 - 50,23 = 1.949,77 \; m \end{cases}$$

$$Rec\left(Y_C; Ac_{C'}^{CE}\right) \equiv Rec(5,39; 36° \, 52' \, 12") \equiv \begin{cases} P_N: 4,31 \; m \\ P_E: 3,23 \; m \end{cases}$$

$$Coordenadas \; CE \begin{cases} N: 1.937,67 + 4,31 = 1.941,98 \; m \\ E: 1.949,77 + \; 3,23 = 1.953,00 \; m \end{cases}$$

e) Punto $\boldsymbol{ET}$:

$$Rec\left(T_T; Ac_{V2}^{V3}\right) \equiv Rec(152,50; 306° \, 52' \, 12") \equiv \begin{cases} P_N: \; 91,50 \; m \\ P_E: -122,00 \; m \end{cases}$$

$$Coordenadas \; ET \begin{cases} N: 1.900,00 \; + 91,50 = 1.991,50 \; m \\ E: 2.000,00 - \; 122,00 = 1.878,00 \; m \end{cases}$$

f) Punto $\boldsymbol{O_2}$

$$Rec\left(T_T - X_o; Ac_{V2}^{V1}\right) \equiv Rec(107,55; 80° \, 32' \, 16") \equiv \begin{cases} P_N: \; 17,68m \\ P_E: 106,09 \; m \end{cases}$$

$$Coordenadas \; O_2 \begin{cases} N: 1.900,00 + \; 17,68 = 1.917,68 \; m \\ E: 2.000,00 + 106,09 = 2.106,09 \; m \end{cases}$$

$$Acimut_{B}^{O_2} = Ac_{B'}^{EC} = 350° \, 32' \, 16"$$

$$Rec\left(R_C + \Delta R_C; Ac_{B}^{O_2}\right) \equiv Rec(251,35; 350°32' \, 16") \equiv \begin{cases} P_N: 247,93m \\ P_E: -41,32m \end{cases}$$

$$Coordenadas \; O_2 \begin{cases} N: 1.917,68 + 247,93 = 2.165,61 \; m \\ E: 2.106,09 \; - 41,32 = 2.064,77m \end{cases}$$

también (comprobación):

$$Rec\left(E + \Delta R_C; Ac_{V2}^{O_2}\right) \equiv Rec(273,39; 13° \, 42' \, 14") \equiv \begin{cases} P_N: 256,61m \\ P_E: \; 64,77m \end{cases}$$

$$Coordenadas \; O_2 \begin{cases} N: 1.900,00 \; + 256,61 = 2.165,61 \; m \\ E: 2.000,00 \; + \; 64,77 = 2.064,77 \; m \end{cases}$$